Exercices de logique

<u>Fiche n°3</u> Calcul propositionnel (tables de vérité)
Correction de quelques exercices

2- Démontrer, <u>sans tables de vérité</u>[1], que : $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv q$
Soit V la constante "vrai" et F la constante "faux", vérifier également (sans tables de vérité)

- $p \Rightarrow F \equiv \neg p$
- $V \Rightarrow p \equiv p$

Corrigé :
Se rappeler que : $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ et que F est élément neutre de $\vee$.
On a :

$$(p \Rightarrow F) \equiv (\neg p \vee F)) \equiv \neg p$$
$$(V \Rightarrow p) \equiv (\neg V \vee p) \equiv (F \vee p) \equiv p$$

3- Donner la **négation** de l'expression suivante (sous une forme la plus simple possible):

$$(q \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$\neg((q \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \equiv ((q \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge \neg(p \Rightarrow q)) \equiv$$
$$((q \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge (p \wedge \neg q)) \equiv (\neg q \vee (p \wedge r)) \wedge (p \wedge \neg q) \equiv$$
$$(\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg q) \equiv ((\neg q \vee p) \wedge p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg q \equiv$$
$$p \wedge \neg q$$

6- On introduit le symbole "|":barre de Scheffer ou encore "barre d'incompatibilité" en définissant: p | q par: **p et q sont incompatibles (p et q ne peuvent pas être vraies en même temps)**. Donner sa table de vérité? Démontrer que ce connecteur suffit à définir tous les autres.

p	q	p|q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Noter que $(p \mid q) = \neg(p \wedge q)$
Donc $(p \mid p) = \neg p$
Donc $(p \wedge q) = \neg(p \mid q) = (p \mid q) \mid (p \mid q)$
Noter aussi que $(p \vee q) = (\neg p \mid \neg q) = (p \mid p) \mid (q \mid q)$

7 - Montrer que tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables à partir des seuls connecteurs: $\Rightarrow$ et $\neg$.

On sait (table de vérité) que $(p \Rightarrow q) = \neg p \vee q$, donc $(p \vee q) = (\neg p \Rightarrow q)$
$(p \wedge q) = \neg(\neg p \vee \neg q) = \neg(p \Rightarrow \neg q)$

[1] c'est-à-dire par exemple en utilisant des lois bien connues de la logique propositionnelle (associativité, commutativité, distributivité, absorption etc.)